離散可積分系の特異点閉じ込めと互いに素条件について

神吉 雅崇 [1], 時弘 哲治 [1], 間瀬崇史 [1], 間田 潤 [2]
[1] 東京大学大学院数理科学研究科, [2] 日本大学生産工学部
e-mail : kanki@ms.u-tokyo.ac.jp

1 概要

離散可積分方程式における「特異点閉じ込め手法」の拡張について紹介する。本講演では、まず導入として Somos-4 数列に関係する QRT 写像の項の既約性と可積分性の関係について紹介し、その後離散 KdV 方程式への応用を考察する。主結果は離散 KdV 方程式について、その「ローラン性」(各項が初期値のローラン多項式である性質)、「既約性」、「co-primeness」(隣接項が互いに素である性質) について定式化と証明を行ったことである。これらの 3 性質が可積分性判定テストの一種である「特異点閉じ込め手法」の拡張となっていることを、離散 KdV 方程式をはじめとするいくつかの可積分系および非可積分系の例によって紹介する。今回紹介する証明は基礎体の標数に依存しないため、有限体上の方程式系 (および超離散系) の性質を調べることにも役立つと期待できる。

2 主結果

離散 KdV 方程式の双線形形式は n, t を独立変数とする

$$(1+\delta)\sigma_{n+1}^{t+1}\sigma_n^{t-1} = \delta\sigma_{n+1}^{t-1}\sigma_n^{t+1} + \sigma_n^t\sigma_{n+1}^t \tag{1}$$

の形である。σ_n^t に関してはクラスター代数 [1] との関連から次が知られている [2, 3]。

事実 1 σ_n^t は初期値集合 I_σ の要素を変数とする既約なローラン多項式になる。さらに σ_n^t と σ_m^s は $(n,t) \neq (m,s)$ のとき互いに素である。ここで $I_\sigma = \{\sigma_n^0, \sigma_n^1, \sigma_0^t\ (n, t \geq 0)\}$ で与えられ、既約性や互いに素はローラン多項式としての意味である。

一方、離散 KdV 方程式の非線形形式は次の偏差分方程式である:

$$\frac{1}{w_{n+1}^{t+1}} - \frac{1}{w_n^t} + \frac{\delta}{1+\delta}(w_n^{t+1} - w_{n+1}^t) = 0. \tag{2}$$

時間発展は初期値集合 $I_w = \{w_n^0,\ w_1^t\ (n \geq 1, t \geq 0)\}$ から第一象限上に定まる。双線形形式との対応は $w_n^t = \dfrac{\sigma_{n-1}^{t+1}\sigma_n^t}{\sigma_n^{t+1}\sigma_{n-1}^t}$ である。

事実 1 を時間発展方向の相異なる 2 形式の双線形離散 KdV 方程式に適用することによって、非線形離散 KdV 方程式の変数 $\{w_n^t\}$ 間の共通因子について次が分かる。(文献 [4] においては標数 0 の体上で、かつ限定された初期条件において次の定理を証明している。本講演では一般のケースに関する証明を紹介する。)

主定理 2 w_n^t と w_m^s は $|m-n| \geq 2$ または $|s-t| \geq 2$ であるとき、お互いに I_w の元を変数とする有理式として (分子にも分母にも) 単項式以外の共通因子を持たない。

(証明の方針) 方程式 (1) および、その変数 n と t を入れ替えた双線形形式

$$(1+\tilde{\delta})\sigma_{n+1}^{t+1}\sigma_{n-1}^t = \tilde{\delta}\sigma_{n-1}^{t+1}\sigma_{n+1}^t + \sigma_n^t\sigma_n^{t+1} \tag{3}$$

は先に挙げた変換 $w_n^t = \dfrac{\sigma_{n-1}^{t+1}\sigma_n^t}{\sigma_n^{t+1}\sigma_{n-1}^t}$ によってともに (2) に一致する。(ただし $\tilde{\delta} = \dfrac{-\delta}{1+2\delta}$ である。) 方程式 (1) と (3) の両方は事実 1 によりローラン性、既約性、co-primeness をもつ。初期値集合 I_w

と I_σ 間の対応を詳細に調べることで、上の 2 式に対する事実 1 から非線形形式 (2) の項の共通因子に関する性質を導く。具体的には (1) に対する事実 1 から、(2) の相異なる 2 項は I_w の元または $\left(w_1^{j-1}w_1^j - \frac{1+\delta}{\delta}\right)$, $(j = 1, 2, \cdots)$ の単項式以外の共通因子を持たないことが分かる。一方、(3) に同様の操作を行うことで、(2) の相異なる 2 項は I_w の元または $\left(w_{j-1}^0 w_j^0 - \frac{1+\tilde{\delta}}{\tilde{\delta}}\right)$, $(j = 1, 2, \cdots)$ の単項式以外の共通因子を持たない。両結果をまとめることで定理は示される。

結果の解釈　w_n^t は、n または t 方向に 2 以上離れると共通因子を持たず、したがって 2 マス以上先に特異点が伝播しないことが分かる。つまり特異点がごく狭い領域に閉じ込められていることを代数的に証明できた。証明の詳細を見ることで定理は正標数の体上でも成り立つことが分かる。

3　課題

今後の課題は、様々な離散方程式系における co-primeness と可積分性の関係を調べることである。現在、離散戸田方程式において同種の試みが進行中である。その他にも可解カオス系や線形化可能系など、従来の可積分性判定テストでは十分な判定ができない興味深い系も多く、これらの調査も行いたい。また、代数的エントロピー [5]、 almost good reduction テスト [6]、超離散系における特異点閉じ込め [7] などの他の可積分性判定基準との関係についても今後の課題である。最終的に統一的な可積分性判定テストを構成することを目標としている。

謝辞　本研究は科研費 24-1379、25-3088 および文部科学省博士課程教育リーディングプログラムの助成を受けたものである。

参考文献

[1] S. Fomin, A. Zelevinsky, Cluster algebras I: Foundations, *J. Am. Math. Soc.* **15**, (2002), 497–529.

[2] S. Fomin, A. Zelevinsky, The Laurent phenomenon, *Adv. Appl. Math.* **28**, (2002), 119–144.

[3] T. Mase, The Laurent Phenomenon and Discrete Integrable Systems, *RIMS Kôkyûroku Bessatsu* **B41**, (2013), 43–64.

[4] M. Kanki, J. Mada, T. Tokihiro, Singularities of the discrete KdV equation and the Laurent property, *J. Phys. A: Math. Theor.* **47**, (2014), 065201 (12pp).

[5] M. P. Bellon, C. M. Viallet, Algebraic Entropy, *Comm. Math. Phys.* **204**, (1999), 425–437.

[6] M. Kanki, J. Mada, K. M. Tamizhmani and T. Tokihiro, Discrete Painlevé II equation over finite fields, *J. Phys. A: Math. Theor.* **45**, (2013), 342001 (8pp).

[7] N. Joshi, S. Lafortune, How to detect integrability in cellular automata, *J. Phys. A: Math. Theor.* **38**, (2005), L499–L504.