ボトルネックにおける粉体の挙動について

増田　匠 [1]

[1] 東京大学工学系研究科航空宇宙工学専攻

e-mail：msdtakumi@gmail.com

1　概要

粉体とは多くの粒子の集合体であり，通常の流体とは異なる興味深い挙動を見せる系である．流動状態の粉体にみられる現象で最も重要なものの一つが，ボトルネックの直前で粉体粒子がアーチ状の構造を作り，流れ全体を止めてしまうことである．この現象は「渋滞」と呼ばれる．ボトルネックでおこる渋滞で最も重要な事実は，粉体粒子の約 6 倍以上の幅のボトルネックでは渋滞現象が生じないことである [1].

本研究では，ボトルネック直前の粉体粒子の挙動を再現するモデルを提案し，渋滞確率や雪崩の大きさの分布を解析する．

2　モデル

本研究では，2 次元のボトルネックを対象とする．ボトルネック直前の半円形の領域にアーチ状の構造が発生しうると仮定し，その部分を 1 次元セルオートマトンでモデル化する (図 1)．サイトの大きさは粒子と同程度とする．すなわち，各サイトは空であるか 1 個の粒子に占められているとする．すべてのサイトが粒子で占められたとき，アーチが生じたとみなすことができる．

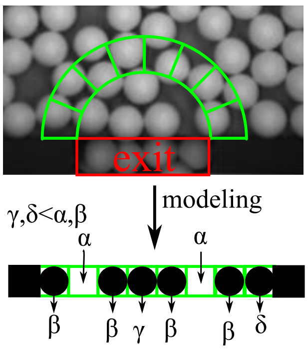

図 1. ボトルネック周辺の粉体のモデル化．ボトルネック直線の領域を 1 次元セルオートマトンモデルで定式化する．各サイトに最大 1 個の粒子が入るとする．上流から確率 α で粒子が供給される．粒子の流出は隣接セルの状態に依存する．両隣のサイトが粒子に占められていた場合，確率 γ で粒子が流出する．それ以外の場合は，確率 β で流出する．

ボトルネックの上流を粒子を一定の割合で供給する粒子浴とみなして，空のサイトに確率 α で粒子が供給されるものとする．粒子の摩擦を表現するために，粒子の流出は隣接セルの状態に依存するものとする．両隣のサイトが粒子に占められていた場合，確率 γ で粒子が流出する．それ以外の場合は，確率 β で流出する．境界に接する粒子は，隣のサイトが占められているとき確率 δ，それ以外の場合確率 β で流出する．摩擦を表現するため，パラメータの範囲は $\gamma, \delta < \beta$ である．簡単のために，以下では $\alpha = \beta, \gamma = \delta$ と仮定し，$\varepsilon = \gamma/\alpha$ とおく．

3　断続的な流れ

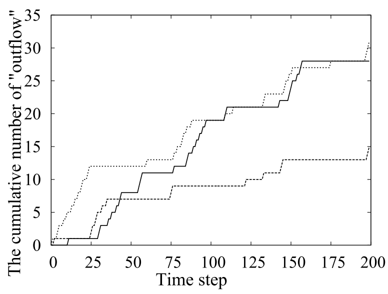

図 2. 流出した粒子数の時系列．縦軸は粒子数，横軸はステップ数を表している．パラメータは，$\alpha = \beta = 0.9, \gamma = \delta = 0.1$ である．3 本のグラフは同じパラメータの異なる試行を表している．

図 2 は流出した粒子数の時系列である．グラフは，水平な部分と右上がりの部分に分けることができる．グラフが水平になっている部分ではアーチのために流れが停止し，右上がりの部分では粒子が流出している．二つの領域は，アーチの形成と崩壊のために互いにランダムに入れ替わる．このような断続的な流れは，人の群集や振動を加えられた粉体がボトルネックを通過するときに見られる [1, 2].

4　モデルの解析

サイト j に粒子が存在するとき $s_j = 1$，存在しないとき $s_j = 0$ として，サイト j の状態を s_j によって表す．L 個のサイトからなる系が状態 $(s_1, \ldots, s_L)$ をとる確率を $P(s_1, \ldots, s_L)$

とする．このとき，系の定常状態の分布を

$$|P\rangle = \sum_{(s_1,\dots,s_L)} P(s_1,\dots,s_L)|s_1\rangle \otimes \cdots \otimes |s_L\rangle,$$
$$\text{where } |0\rangle = {}^t(1,0), \quad |1\rangle = {}^t(0,1) \qquad (1)$$

と表すことができる．定常状態の分布 $|P\rangle$ はマスター方程式に従う：

$$H|P\rangle = 0. \qquad (2)$$

行列 H はモデルのルールから簡単に求めることができる．$|P\rangle$ と任意のベクトル $\langle w|$ の内積は次の式から簡単に計算できる．

$$\langle w|P\rangle = \frac{\det[\, H + |V\rangle\langle w|\,]}{\det[\, H + |V\rangle\langle V|\,]}, \qquad (3)$$
$$\text{where } |V\rangle = {}^t(1,\dots,1).$$

この式によって，アーチが生じる確率 P_{arch} や平均流量 $\langle Q|P\rangle$ などを求めることができる．

5 雪崩

渋滞が起こるまでの間に流出した粒子群を雪崩 (avalanche) という．本研究のモデルでは，N ステップ以上崩れなかったアーチを安定なアーチと呼び，安定なアーチが崩壊してから次の安定なアーチが形成されるまでに流出した粒子群を雪崩と呼ぶ．実験により雪崩の大きさは指数分布に従うことが分かっている [1].

本研究のモデルでは，雪崩の大きさの平均は

$$m = \frac{1}{SR(\varepsilon, L)}, \quad R(\varepsilon, L) = \frac{Q_{\mathrm{arch}} P_{\mathrm{arch}}}{\langle Q|P\rangle}. \qquad (4)$$

となる．ここで S はアーチが安定である確率，Q_{arch} はアーチが崩壊する確率である．

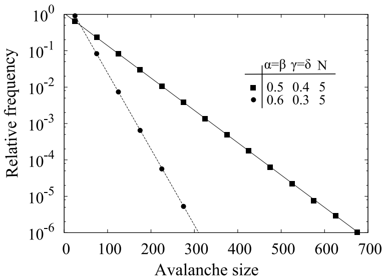

図 3. 雪崩の規模の分布．プロットはシミュレーションの結果であり，線は式 (4) が平均となるような指数分布である．

図 3 に雪崩の大きさの分布を示した．シミュレーションの結果は指数分布を示し，実験と定性的に一致した．また，図 3 の線は式 (4) が平均となるような対数分布であり，シミュレーションと理論が一致していることが分かる．

6 渋滞する確率

M 個の粒子がボトルネックを通過するまで安定したアーチが生じない確率 $J(\varepsilon, L)$ はゴンペルツ関数で表される．

$$J(\varepsilon, L) = 1 - \exp[-A(\varepsilon) SMB(\varepsilon)^{-L}\,], \qquad (5)$$

ここで，$A(\varepsilon), B(\varepsilon)$ は，$R(\varepsilon, 3), R(\varepsilon, 4)$ から決まる．

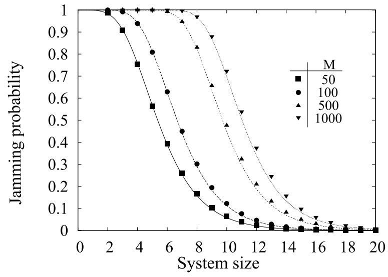

図 4. 渋滞する確率．縦軸は渋滞する確率，横軸は系の大きさである．パラメータは $\varepsilon = 0.5, N = 5$ である．グラフは単調減少し有限の大きさでほぼ 0 となる．

図 4 から分かるように，渋滞する確率は有限の大きさでほとんど 0 になる．この事実は実験と一致し，ある大きさ以上のボトルネックは渋滞しないことを示す [1].

7 結論

本研究で提案したモデルは，断続的な流れ，雪崩の大きさの分布，渋滞する確率を再現した．したがって，ボトルネックを通過する粉体の本質的な性質を捉えていると結論できる．

謝辞 研究に協力してくださった西成教授，Schadschneider 教授に感謝いたします．両教授の助言により，研究方針の見通しが良くなり，数式を大幅に簡略化できました．

参考文献

[1] A. Janda, I. Zuriguel, A. Garcimartín, L. A. Pugnaloni, and D. Maza, "Jamming and critical outlet size in the discharge of a two-dimensional silo", EPL 84, 44002 (2008)

[2] D. Helbing, L. Buzna, A. Johansson, and T. Werner, "Self-Organized Pedestrian Crowd Dynamics: Experiments, Simulations, and Design Solutions", Transp. Sci. 39, 1 (2005).