q-Bessel 関数の符号付き超離散極限

礒島伸（法政大理工）

概要

超離散化とは，与えられた差分方程式に直接対応するセルオートマトン構成する極限操作である．この手法により，箱玉系を始めとする数々の可積分セルオートマトンが構成され，その数理構造が研究されてきた．しかし，この手法を適用する差分方程式は，解が正値であり，かつ減算を含まないものでなければならない．この制約を解消するため，その拡張である符号付き超離散化 [1] という手法を最近提案した．具体的には，差分方程式の従属変数 x_n に対して符号変数 $\xi_n = x_n/|x_n|$ および振幅変数 $X_n = \varepsilon \log |x_n|$ を導入する．ここで $\varepsilon > 0$ はパラメータである．また，関数 $s : \{1, -1\} \to \{0, 1\}$ を $s(1) = 1$，$s(-1) = 0$ で定義する．これらを用いて変数変換

$$x_n = \{s(\xi_n) - s(-\xi_n)\}e^{X_n/\varepsilon} = \begin{cases} e^{X_n/\varepsilon} & (x_n > 0) \\ -e^{X_n/\varepsilon} & (x_n < 0) \end{cases} \tag{1}$$

を施す．その後に，すべての項が正値になるように移項によって方程式を整え，両辺に $\varepsilon \log$ を施して極限 $\varepsilon \to +0$ を取る．その極限は，関数 $S : \{1, -1\} \to \{0, 1\}$，$S(1) = 0$，$S(-1) = -\infty$ を用いた公式

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \varepsilon \log(s(\xi)e^{X/\varepsilon} + e^{Y/\varepsilon}) = \max(S(\xi) + X, Y) \tag{2}$$

により，$S(\xi_n)$ と X_n たちの間の $+$，$-$ および max 演算で表される．ただし $-\infty$ は max 演算の中からその項を消し去る記号とする．この手続きは，$\xi_n \equiv 1$ とすれば通常の超離散化に帰着される．また，元の差分系の厳密解の極限が符号付き超離散系の解となることは通常の超離散化と同様である．

Bessel 方程式の q 差分化の 1 つとして知られている

$$J_\nu(n+1) - (q^\nu + q^{-\nu})J_\nu(n) + \{1 + (1-q)^2 q^{2n-2}\}J_\nu(n-1) = 0 \tag{3}$$

は，変換 $q = e^{Q/\varepsilon}$，$Q < 0$ および $J_\nu(n) = \{s(\beta^\nu_n) - s(-\beta^\nu_n)\}\, e^{B^\nu{}_n/\epsilon}$ により，符号付き超離散 Bessel 方程式

$$\begin{aligned} &\max[S(\beta^\nu_{n+1}) + B^\nu_{n+1}, S(-\beta^\nu_n) + B^\nu_n - \nu Q, S(\beta^\nu_{n-1}) + B^\nu_{n-1}, S(\beta^\nu_{n-1}) + B^\nu_{n-1} + (2n-2)Q] \\ &= \max[S(-\beta^\nu_{n+1}) + B^\nu_{n+1}, S(\beta^\nu_n) + B^\nu_n - \nu Q, S(-\beta^\nu_{n-1}) + B^\nu_{n-1}, S(-\beta^\nu_{n-1}) + B^\nu_{n-1} + (2n-2)Q] \end{aligned} \tag{4}$$

に帰着される．その初期値問題の解として，漸近挙動から Bessel 関数の対応物と考えられる「超離散 Bessel 関数」が提出されている [2]．本講演では，(3) の特殊解として知られている q-Bessel 関数

$$J_\nu(n) = (1-q)^\nu (q^n)^\nu \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j (1-q)^{2j}}{(q^2;q^2)_j (q^2;q^2)_{\nu+j}} (q^n)^{2j} \tag{5}$$

$$(a;q)_k = \begin{cases} 1 & (k = 0) \\ (1-a)(1-aq)\ldots(1-aq^{k-1}) & (k \in \mathbb{Z}_{>0}) \end{cases} \tag{6}$$

の極限を評価することによって，(4) の特殊解を構成する．$n \leq 0$ に対して (5) を評価することは困難であるため，q-Euler 変換

$$\sum_{j=0}^{\infty} c_j d_j x^j = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\hat{D}^k c_0)}{[k]!} x^k \hat{B}^k \psi(x) \tag{7}$$

ただし

$$\begin{gathered}
\psi(x) := \sum_{j=0}^{\infty} d_j x^j, \qquad \hat{B}\psi(x) := \frac{\psi(x) - \psi(qx)}{(1-q)x} \\
[k] := \frac{1-q^k}{1-q}, \qquad [k]! := \begin{cases} 1 & (k=0) \\ [k][k-1]\ldots[1] & (k \in \mathbb{Z}_{>0}) \end{cases} \\
\hat{E}c_j := c_{j+1}\ (j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}), \quad \hat{D}^k := (\hat{E}-1)(\hat{E}-q)\ldots(\hat{E}-q^{k-1})
\end{gathered}$$

を用いて別の表現

$$J_\nu(n) = \frac{(1-q)^\nu q^{\nu n}}{(-(1-q)^2 q^{2n}; q^2)_\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (1-q)^{2k}}{(q^2;q^2)_k (q^2;q^2)_{k+\nu}} q^{2k(k+\nu+n)} \tag{8}$$

に書き換えることがポイントである．結果は

$$(\beta_n^\nu, B_n^\nu) = \begin{cases} (1, n\nu Q) & (n \geq 1) \\ (1, n(n+\nu-1)Q) & (0 \geq n \geq -\nu) \\ \left((-1)^{\frac{n+\nu}{2}}, \frac{n(n-2)-\nu^2}{2} Q\right) & (n \leq -\nu-1, n+\nu : \mathrm{even}) \\ \left((-1)^{\frac{n+\nu+1}{2}}, \frac{n(n-2)-\nu^2+3}{2} Q\right) & (n \leq -\nu-1, n+\nu : \mathrm{odd}), \end{cases} \tag{9}$$

となる．以前提出された初期値問題の解との差異については講演の中で議論する．また，非線形方程式への拡張として，q 差分パンルヴェ III 型方程式

$$w_{n+1} w_{n-1} = \frac{\alpha w_n^2 + \beta \lambda^n w_n + \gamma \lambda^{2n}}{w_n^2 + \delta w_n + \alpha} \tag{10}$$

の超離散類似について議論する．パラメータ α，β，γ，δ，λ が特別な値のとき，(10) は (3) の解を成分とする 2 方向 Casorati 行列式を用いて表される特殊解の系列を持つことが知られている．この解の極限を評価することで，超離散パンルヴェ III 型方程式の特殊解系列を構成することができる．

参考文献

[1] 礒島伸, 薩摩順吉, 超離散化における負の問題の解決, 日本応用数理学会論文誌, **23** (2013), 325–339.

[2] 奈良崎史貴, 礒島伸, 薩摩順吉, 符号付き超離散 Bessel 方程式とその特殊解について, 研究集会報告「非線形波動研究の進展 —現象と数理の相互作用—」, 九州大学応用力学研究所, **23AO-S7** (2012), 96–101.