切頂正多面体上の
離散ソボレフ不等式の最良定数

山岸 弘幸 (都立産技高専)，　亀高 惟倫 (阪大)，　永井 敦 (日大)，
渡辺 宏太郎 (防衛大)，　武村 一雄 (日大)

切頂正 M 面体上の離散ソボレフ不等式の最良定数を求めた．$M=4,6,8$ である．頂点数を N とする．切頂正 4 面体では $N=12$，切頂正 6, 8 面体では $N=24$ である．対称性を考慮して，各多面体の頂点の番号を図 1~2 のように番号付ける．

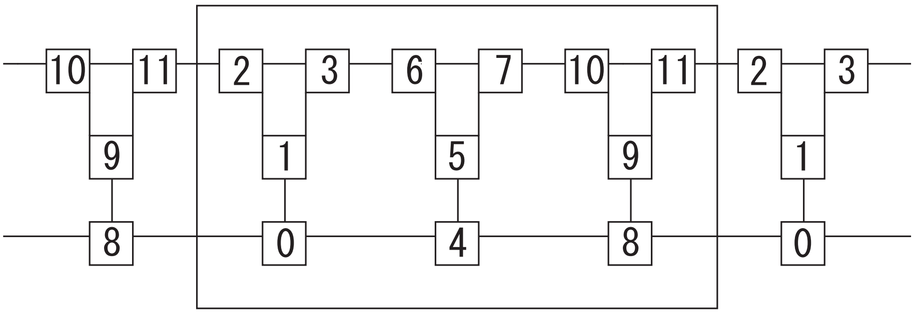

図 1 切頂正 4 面体

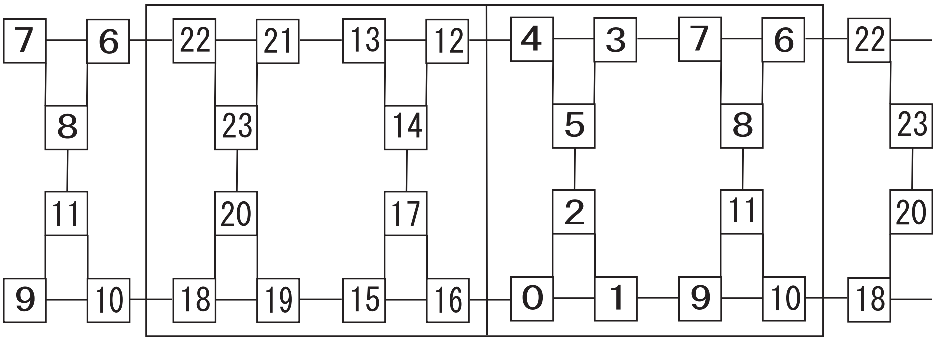

図 2 切頂正 6 面体

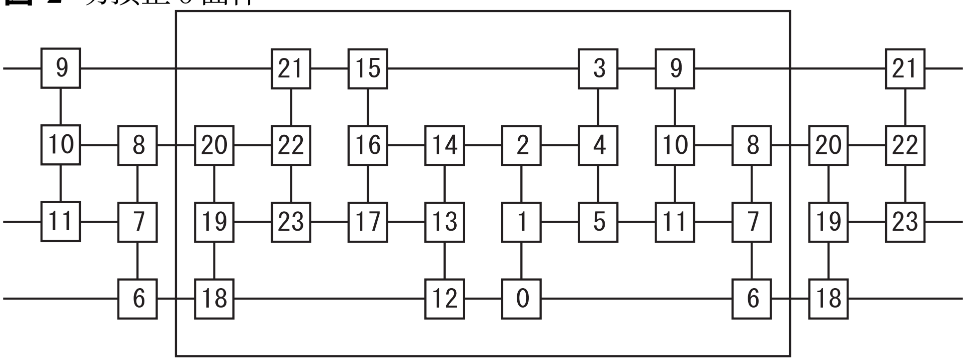

図 3 切頂正 8 面体

$\boldsymbol{A}$ は $N \times N$ 実対称非負定値で，$-\Delta$ の離散化のうち最も簡単なものである．$\boldsymbol{A}$ は固有値 0 をもち，その固有空間は 1 次元で基底は $\mathbf{1} = {}^t(1,1,\cdots,1)$ である．その他 $N-1$ 個の固有値は全て正である．離散熱核 $\boldsymbol{H}(t) = \exp(-t\boldsymbol{A})$，グリーン行列

$\boldsymbol{G}(a) = (a\boldsymbol{I} + \boldsymbol{A})^{-1}$，擬グリーン行列 $\boldsymbol{G}_* = \lim_{a \to +0} \left(\boldsymbol{G}(a) - a^{-1}\boldsymbol{E}_0\right)$ を導入する．ただし $\boldsymbol{E}_0 = N^{-1}\mathbf{1}\,{}^t\mathbf{1}$ は $\boldsymbol{A}$ の固有値 0 に対応する固有空間への射影行列である．結論は次の通り．

定理 1 ${}^t\mathbf{1}\boldsymbol{u} = 0$ をみたす任意の $\boldsymbol{u} \in \mathbf{C}^N$ に対し，$\boldsymbol{u}$ によらない正定数 C があって，離散ソボレフ不等式

$$\left(\max_{0 \le j \le N-1} |\,u(j)\,|\right)^2 \le C\,\boldsymbol{u}^*\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}$$

が成り立つ．C のうち最良のもの $C_0(M)$ は，擬グリーン行列の対角成分の値となり，それぞれ

$$C_0(4) = \frac{301}{720}, \qquad C_0(6) = \frac{173}{288}, \qquad C_0(8) = \frac{1019}{2016}$$

である．上の不等式で C を $C_0(M)$ で置き換えるとき，$\boldsymbol{G}_*$ の各列ベクトルで等号が成り立つ．

定理 2 $0 < a < \infty$ とする．任意の $\boldsymbol{u} \in \mathbf{C}^N$ に対し $\boldsymbol{u}$ によらない正定数 C があって，離散ソボレフ不等式

$$\left(\max_{0 \le j \le N-1} |\,u(j)\,|\right)^2 \le C\,\boldsymbol{u}^*(\boldsymbol{A} + a\boldsymbol{I})\boldsymbol{u}$$

が成り立つ．C のうち最良のもの $C_0(M;a)$ は，グリーン行列の対角成分の値となり，それぞれ

$$C_0(4;a) = \frac{5 + 34a + 32a^2 + 10a^3 + a^4}{a(1+a)(3+a)(4+a)(5+a)},$$
$$C_0(6;a) = \frac{10 + 192a + 571a^2 + 667a^3 + 382a^4 + 114a^5 + 17a^6 + a^7}{a(1+a)(2+a)(3+a)(4+a)(5+a)(2+5a+a^2)},$$
$$C_0(8;a) = \gamma_0(a)/d(a),$$
$$\gamma_0(a) = 336 + 5584a + 16992a^2 + 22768a^3 + 16668a^4 + 7260a^5 + 1932a^6 +$$
$$308a^7 + 27a^8 + a^9,$$
$$d(a) = a(2+a)(4+a)(6+a)(2+4a+a^2)(6+6a+a^2)(14+8a+a^2)$$

となる．上の不等式で C を $C_0(M;a)$ で置き換えるとき，グリーン行列の各列ベクトルで等号が成り立つ．

参考文献

[1] 亀高惟倫・渡辺宏太郎・山岸弘幸・永井敦・武村一雄，正多面体上の離散ソボレフ不等式の最良定数，日本応用数理学会論文誌，第 21 巻 第 4 号 (2011)，289–308.