$C_N^{(1)}$ 型離散戸田格子の幾何学的実現

野邊 厚
千葉大学教育学部
e-mail : nobe@faculty.chiba-u.jp

1 $C_N^{(1)}$ 型離散戸田格子

Bogoyavlensky [1] に始まる戸田格子の一般化において，通常の（システムサイズ $N+1$ の）周期離散戸田格子は $A_N^{(1)}$ 型アフィン Lie 環の表現を用いて構成され，$A_N^{(1)}$ 型離散戸田格子とよばれる [2, 3]．$A_N^{(1)}$ 型離散戸田格子には様々な表式があるが，ここでは Suris [3] によって得られた表式を考える：

$$\begin{cases} \bar{I}_k = \dfrac{I_k - V_k}{I_{k-1} - V_{k-1}} I_{k-1}, \\ \bar{V}_k = \dfrac{I_{k+1} - V_{k+1}}{I_k - V_{k-1}} V_k \end{cases} \quad (k \in \mathcal{I}_{N+1}) \quad (1)$$

ここで，$\mathcal{I}_l = \{1, 2, \ldots, l\}$ である．

注意 1 (1) において，変数 I_k の時間を反転する（$I_k \leftrightarrow \bar{I}_k$）と，よく知られた Hirota-Tsujimoto-Imai による表式 [4] を得る：

$$\begin{cases} \bar{I}_k + \bar{V}_{k-1} = I_k + V_k, \\ \bar{I}_k \bar{V}_k = I_{k+1} V_k \end{cases} \quad (k \in \mathcal{I}_{N+1})$$

周期箱玉系の導出にはこの式が使われることが多い [5].

文献 [3] において，$C_N^{(1)}$ 型離散戸田格子は $C_N^{(1)}$ 型アフィン Lie 環の表現を用いて，次のような Lax 形式として構成される：

$$M\bar{L} = L\bar{M}$$

ここで，L, M はそれぞれ変数 I_k, V_k およびスペクトルパラメータ ζ を成分としてもつ次のような $2N$ 次正方行列である：

$$L = \left[\begin{array}{ccc|ccc} I_1 & & & & & \zeta \\ \zeta & \ddots & & & & \\ & \ddots & I_N & & & \\ \hline & & \zeta & I_{N+1} & & \\ & & & -\zeta & \ddots & \\ & & & & \ddots & \ddots \\ & & & & -\zeta & I_{2N} \end{array}\right],$$

$$M = \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & \frac{V_1}{\zeta} & & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & & \\ & & 1 & \frac{V_N}{\zeta} & & & \\ \hline & & & 1 & \frac{V_{N+1}}{-\zeta} & & \\ & & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & & \ddots & \frac{V_{2N-1}}{-\zeta} \\ \frac{V_{2N}}{\zeta} & & & & & & 1 \end{array}\right]$$

さらに，各変数 I_k, V_k は次のような拘束条件を満たしていなければならない：

$$\begin{cases} I_k I_{2N+1-k} = 1 & (k \in \mathcal{I}_N) \\ \dfrac{V_k}{V_{2N-k}} - I_k I_{k+1} = 0 & (k \in \mathcal{I}_{N-1}) \\ \displaystyle\prod_{k=1}^{2N} V_k = h^{2N} & \end{cases} \quad (2)$$

ここで，h は時間差分間隔を表す．拘束条件に関して次の命題が成り立つ．

命題 2 (2) の左辺は保存量である．

Lax 行列 L, M において，スペクトルパラメータ ζ の符号をすべて正にすると $A_{2N-1}^{(1)}$ 型離散戸田格子の Lax 行列になる．したがって，$C_N^{(1)}$ 型離散戸田格子の時間発展方程式は (1) と同一（ただし $k \in \mathcal{I}_{2N}$）であり，$C_N^{(1)}$ 型離散戸田格子は $A_{2N-1}^{(1)}$ 型離散戸田格子に初期条件 (2) を付加したものをと見なすことができる．($4N$ 個の初期値 $I_1, \ldots, I_{2N}, V_1, \ldots, V_{2N}$ のうち，$2N$ 個は任意にとることができる.)

ここで，多項式 $f(x, y)$ を次のようにおく（$y = -\zeta^N$）：

$$\begin{aligned} f(x, y) &= y \det (L + xM) \\ &= y^2 - \left(x^{2N} + c_{2N-1} x^{2N-1} + \cdots + c_0\right) y \\ &\quad + c_{-1} x^{2N} \end{aligned}$$

このとき，$C_N^{(1)}$ 型離散戸田格子のスペクトル曲線 $\gamma = (f(x, y) = 0) \cup \{P_\infty, P'_\infty\}$（$P_\infty, P'_\infty$ は無限遠点）は種数 $2N-1$ の超楕円曲線である

が，γ は $A_{2N-1}^{(1)}$ 型離散戸田格子のスペクトル曲線でもあるので，その時間発展は γ の加法を用いて実現することができる [6].

2　超離散化

(1)，(2) を超離散化しよう．正数 ϵ に対し

$$I_k = e^{-J_k/\epsilon}, \quad -V_k = e^{-W_k/\epsilon}, \quad h = e^{-H/2N\epsilon}$$

($k \in \mathcal{I}_{2N}$) とおく．これらを (1)，(2) に代入し，$\epsilon \to 0$ の極限をとると

$$\begin{cases} \bar{J}_k = \lfloor J_k, W_k \rfloor + J_{k-1} - \lfloor J_{k-1}, W_{k-1} \rfloor, \\ \bar{W}_k = \lfloor J_{k+1}, W_{k+1} \rfloor + W_k - \lfloor J_k, W_k \rfloor \end{cases} \quad (k \in \mathcal{I}_{2N}) \tag{3}$$

および

$$\begin{cases} J_k + J_{2N+1-k} = 0 & (k \in \mathcal{I}_N) \\ W_k - W_{2N-k} - J_k - J_{k+1} = 0 & (k \in \mathcal{I}_{N-1}) \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{2N} W_k = H \end{cases} \tag{4}$$

を得る．ただし $\lfloor \ \rfloor = \min(\ )$ である．$4N$ 次元区分線形写像力学系 (3) に拘束条件 (4) を付加したものを $C_N^{(1)}$ 型超離散戸田格子とよぶ．もちろん (4) の左辺は保存量である．

ここで，(3) は $A_{2N-1}^{(1)}$ 型超離散戸田格子，すなわち超離散周期戸田格子であることに注意しよう．超離散周期戸田格子の時間発展はトロピカル超楕円曲線の加法を用いて実現できる [6] ため，トロピカル超楕円曲線の加法を用いて $C_N^{(1)}$ 型超離散戸田格子の時間発展を実現することもできる．

超離散周期戸田格子において，とくにその初期値を正整数に制限したものは周期箱玉系とよばれる [7]．しかし，$C_N^{(1)}$ 型超離散戸田格子においては，拘束条件 (4) のため，そのような初期値をとることができない．そこで，条件を緩め，初期値を整数に制限したものを考えることにする．時間発展方程式 (3) からわかるように，このような初期値からスタートするとすべての時刻において変数 J_k, W_k は整数値をとるので，$C_N^{(1)}$ 型超離散戸田格子をセルオートマトンと見なすことができる．紙幅の都合上詳細は省くが，J_k, W_k の値を適切に解釈すると，左右両方向に波が進行するようなセルオートマトン（$C_N^{(1)}$ 型箱玉系とよぶ）を構成することができる．

謝辞　本研究は科研費（課題番号：22740100）の助成を受けたものである．

参考文献

[1] O. I. Bogoyavlensky, “On perturbations of the periodic Toda lattice”, *Commun. Math. Phys.* **51** (1976), 201–209.

[2] M. Adler and P. van Moerbeke, “Completely Integrable Systems, Euclidean Lie Algebras, and Curves”, *Adv. Math.* **38** (1980), 267–317.

[3] Y. B. Suris, *The Problem of Integrable Discretization: Hamiltonian Approach*, Birkhäuser, 2003.

[4] R. Hirota, S. Tsujimoto and T. Imai, “Difference Scheme of soliton equations”, 数理解析研究所講究録 **822** (1993), 144–152.

[5] T. Kimijima and T. Tokihiro, “Initial-value problem of the discrete periodic Toda equation and its ultradiscretization”, *Inverse Problems* **18** (2002), 1705–1732.

[6] A. Nobe, “A geometric realization of the periodic discrete Toda lattice and its tropicalization”, *J. Phys. A: Math. Theor.* **46** (2013) 465203 (35pp).

[7] F. Yura and T. Tokihiro, “On a periodic soliton cellular automaton”, *J. Phys. A: Math. Gen.* **35** (2002) 3787–3801.